Rachunek Prawdopodobieństwa.
Funkcje tworzące i procesy gałązkowe.

Definicja. *Zmienną losową nazywamy* **prostą** *gdy przyjmuje tylko wartości całkowite nieujemne. W tej części materiału rozpatrywać będziemy wyłacznie takie zmienne.*

Definicja. Funkcją tworzącą *prostej zmiennej losowej X nazywamy funkcję $G : [0,1] \to [0,1]$ zdefiniowaną wzorem*

$$G(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{i=0}^{\infty} s^i \mathbb{P}(X = i)\,.$$

Twierdzenie 1 (Własności funkcji tworzących)**.** *Jeśli G_X jest funkcją tworzącą prostej zmiennej losowej X, to*

(i) $G_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$ *i* $G_X(1) = 1$,
(ii) G_X *jest ciągła i wypukła,*
(iii) $G_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}X(X-1)\ldots(X-k+1)$, *gdzie* $G_X^{(k)}(1)$ *oznacza k-tą lewostronną pochodną funkcji G_X w punkcie 1.*
(iv) *Jeśli zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne, to*

$$G_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(s) = G_{X_1}(s)G_{X_2}(s)\cdots G_{X_n}(s)\,.$$

Twierdzenie 2. *Niech G_X i G_N będą funkcjami tworzącymi prostych zmiennych losowych X i N. Ponadto niech S będzie sumą N niezleżnych zmiennych losowych $X_1, \ldots X_N$, z których każda ma rozkład taki, jak zmienna losowa X. Wtedy funkcja tworząca zmiennej losowej S dana jest wzorem*

$$G_S(s) = G_N(G_X(s))\,.$$

Definicja. Procesem gałązkowym *generowanym przez prostą zmienną losową X nazywamy ciąg zmiennych losowych $Z_0, Z_1, \ldots$ takim, że $\mathbb{P}(Z_0 = 1) = 1$, a dla $n \geqslant 1$*

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{i,n}\,,$$

gdzie $X_{i,n}$ są niezależnymi kopiami zmiennej losowej X.

Ponieważ $\mathbb{P}(Z_n = 0)$ nie maleje z n granica

$$\eta = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

zawsze istnieje i nazywamy ją **prawdopodobieństwem wymarcia** *procesu.*

Twierdzenie 3. *Niech X będzie prostą zmienną losową, dla której $\mathbb{P}(X = 0) > 0$, G będzie funkcją tworzącą X, a η będzie prawdopodobieństwem wymarcia procesu gałązkowego generowanego przez X.*

(i) *Jeśli $\mathbb{E}X \geqslant 1$, to $\eta = 1$.*
(ii) *Jeśli $\mathbb{E}X < 1$, to $\eta < 1$ jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania $G(s) = s$.*