Wektory losowe

Dowolną funkcję mierzalną $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ nazywamy **zmienną losową dwuwymiarową**, lub, czasami, **dwuwymiarowym wektorem losowym**. Współrzędne tej funkcji, X i Y, są „zwykłymi” zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilitycznej $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Dla takiego wektora (X,Y) **dystrybuanta** $F_{X,Y}:\mathbb{R}^2\to[0,1]$ zdefiniowana jest wzorem

$$F_{X,Y}(x,y)=\mathbb{P}\left(X\leqslant x, Y\leqslant y\right).$$

Aby otrzymać dystrybuanty zmiennych X i Y mając daną dystrybuantę łączną $F_{X,Y}$ należy skorzystać ze wzorów:

$$F_X(x)=\lim_{y\to\infty}F_{X,Y}(x,y),$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to\infty}F_{X,Y}(x,y).$$

Definicja. *Zmienne losowe X i Y są* **niezależne**, *jeśli dla każdej pary $x,y\in\mathbb{R}$ zachodzi*

$$F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)F_Y(y).$$

Twierdzenie. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a,b,c\in\mathbb{R}$ i funkcji $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mamy*

$$\mathbb{E}(af(X,Y)+bg(X,Y)+c)=a\mathbb{E}f(X,Y)+b\mathbb{E}g(X,Y)+c.$$

Definicja. Kowariancją *zmiennej losowej (X,Y) nazywamy liczbę*

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}X\mathbb{E}Y,$$

a **współczynnik korelacji** $\rho(X,Y)$ *zdefiniowany jest wzorem*

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,X}\sqrt{\mathrm{Var}\,Y}}.$$

Uwaga: Istnieją zmienne losowe (X,Y), dla których $\mathrm{Cov}(X,Y)$ i $\rho(X,Y)$ nie są określone, ponieważ bo definiująca je całka lub szereg nie sa zbieżne! Jesli jednak $\rho(X,Y)$ istnieje, to $|\rho(X,Y)|\leqslant 1$.

Twierdzenie. *Jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne, to $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, a zatem* $\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho(X,Y)=0$.

Uwaga: Twierdzenie odwrotne do powyższego nie jest prawdziwe.

Rozpatrzmy teraz osobno przypadki zmiennych losowych dyskretnych i ciągłych.

Definicja. *Jeśli miara generowana w $\mathbb{R}^2$ przez wektor losowy $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ jest czysto atomowa, tzn. istnieją co najwyżej przeliczalne zbiory $\{x_1,x_2,\ldots\}$ i $\{y_1,y_2,\ldots\}$ takie, że*

$$\sum_i\sum_j \mathbb{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right)=1\,,$$

to (X,Y) nazywamy dwuwymiarową zmienną dyskretną o atomach $\{(x_i,y_j):i,j=1,2,\ldots\}$.

Definicja. Rozkład (łączny), *lub* **funkcję masy prawdopodobieństwa**, *zmiennej losowej (X,Y) definiujemy podając wszystkie wartości*

$$p_{i,j}=\mathbb{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right)\,.$$

Wtedy $\sum_{i,j}p_{i,j}=1$.

Definicja. Rozkłady brzegowe *zmiennych X i Y obliczamy za pomoca wzorów*

$$\mathbb{P}\left(X=x_i\right)=\sum_j \mathbb{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right)$$

i

$$\mathbb{P}\left(Y=y_j\right)=\sum_i \mathbb{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right)\,.$$

Twierdzenie. *Zmienna losowe dyskretne X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla* **wszystkich** *wartości (x_i,y_j) zachodzi*

$$\mathbb{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right)=\mathbb{P}\left(X=x_i\right)\mathbb{P}\left(Y=y_j\right)\,.$$

Twierdzenie (Prawo leniwego statystyka). *Niech (X,Y) będzie zmienną losową dyskretną o wartościach (atomach) $\{(x_i,y_j):i,j=1,2,\ldots\}$ i $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną, wtedy*

$$\mathbb{E}(g(X,Y))=\sum_{i,j}g(x_i,y_j)\mathbb{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right).$$

Zatem, np.

$$\mathbb{E}(XY)=\sum_{i,j}x_iy_j\mathbb{P}\left(X=x_i,Y=y_j\right)\,.$$

Definicja. *Jeśli dystrybuanta $F_{X,Y}(x,y)=\mathbb{P}\left(X\leqslant x,Y\leqslant y\right)$ zmiennej losowej dwuwymiarowej $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$, daje się zapisać jako*

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{X,Y}(s,t)dtds\,,$$

dla pewnej nieujemnej funkcji $f_{X,Y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, to zmienną losową (X,Y) nazywamy **(absolutnie) ciągłą**, *a funkcję $f_{X,Y}$* **gęstością** *zmiennej losowej (X,Y). Wtedy*

$$f_{X,Y}(s,t)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}\Big|_{x=s,t=y}\,,$$

dla prawie wszystkich wartości (s,t).

Zauważmy, że wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(s,t)dsdt=1\,.$$

Jeśli (X,Y) jest (absolutnie) ciągła, to gęstość i dystrybuantę zmiennych losowych X i Y znajdujemy ze wzorów

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,t)dt\,,$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,y)ds\,.$$

Twierdzenie. *Jeśli zmienna losowa (x,Y) jest (absolutnie) ciągła, to zmienne losowe X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\,,$$

dla prawie wszystkich x i y, tzn. dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B$, gdzie B jest zbiorem miary zero.

Twierdzenie (Prawo leniwego statystyka)**.** *Jeśli zmienna losowa dwuwymiarowa (X,Y) ma gęstość $f_{X,Y}$, to dla dowolnej funkcji (mierzalnej) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$\mathbb{E}g(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(s,t) f_{X,Y}(s,t)dtds\,,$$

czyli, np.

$$\mathbb{E}(X^2Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s^2 t f_{X,Y}(s,t)dt\,.$$